Еще больше решенных задач находится по ссылке:
100task.ru - Решебник по высшей математике
Краткую теорию и остальные примеры по данной теме можно найти на странице:
100task.ru - Расчет пирамиды

Пример

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) Объем пирамиды;
6) уравнения прямой A_1A_2;
7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
8) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

$A_1(3;1;4), A_2(-1;6;1), A_3(-1;1;6), A_4(0;4;-1)$

Решение

1) Длину ребра A_1A_2 найдем по формуле расстояния между 2-мя точками:

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$$A_1A_2=\sqrt{(-1-3)^2+(6-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{50}\approx 7.071$$

2) Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 найдем как угол между направляющими векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(-1-3,6-1,1-4)=(-4,5,-3)$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}=(0-3,4-1,-1-4)=(-3,3,-5)$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}|\cdot|\overrightarrow{A_1A_4}|}=\frac{-4\cdot(-3)+5\cdot 3-3\cdot(-5)}{\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=0.906$$

$$\varphi=\arccos 0.906=0.437\ рад=25°$$

3) Вычислим угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Для этого вычислим координаты нормального вектора плоскости $A_1A_2A_3$ –им будет векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$.

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(-1-3,1-1,6-4)=(-4,0,2)$$

Векторное произведение:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=10\vec{i}-\vec{j}(-8-12)+\vec{k}(0+20)=10\vec{i}+20\vec{j}+20\vec{k}$$

Нормальный вектор плоскости: $(10,20,20)$

Синус угла:

$$\sin\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{10\cdot(-3)+20\cdot3+20\cdot(-5)}{\sqrt{10^2+20^2+20^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}}=-0.356$$

$$\varphi=\arcsin(-0.356)=-0.364\ \textit{рад}=-20.9°$$

4) Вычислим площадь грани $A_1A_2A_3$. Она будет численно равна половине модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

Искомая площадь:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10^2+20^2+20^2}=15\text{ кв.ед.}$$

5) Вычислим объем пирамиды. Он будет равен шестой части модуля смешанного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

Смешанное произведение:

$$\begin{vmatrix}-4 & 5 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -3 & 3 & -5\end{vmatrix}=-4\cdot(0-6)-5\cdot(20+6)-3\cdot(-12-0)=-70$$

Искомый объем пирамиды:

$$V=\frac{70}{6}=11.7\text{ куб.ед.}$$

6) Вычислим уравнение прямой A_1A_2. Направляющим вектором искомой прямой является вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(-4,5,-3)$. Кроме того, прямая проходит через точку $A_1(3;1;4)$

Уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-4}{-3}$$

7) Вычислим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$. Нормальный вектор плоскости $\vec{n}(10,20,20)$. кроме того, плоскость проходит через точку $A_1(3;1;4)$

$(x-3)\cdot10+(y-1)\cdot20+(z-4)\cdot20=0$

$10x+20y+20z-130=0$

$x+2y+2z-13=0$ -уравнение грани $A_1A_2A_3$

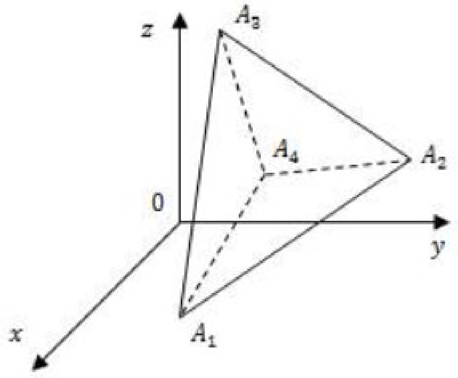
8) Составим уравнение высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$ из вершины A_4:

Нормальный вектор $A_1A_2A_3$ является направляющим вектором высоты, кроме того, высота проходит через точку $A_4(0;4;-1)$

Искомое уравнение высоты:

$$\frac{x-0}{10}=\frac{y-4}{20}=\frac{z+1}{20}$$

Сделаем схематический чертеж:


z
A_3
A_4
A_2
0
y
x
A_1